Betrachtungen über orthogonale Trajektorien *

Leonhard Euler

§1 Das Problem der orthogonalen Trajektorien, welches einst den Scharfsinn der Geometern lange und in großem Maße angeregt hat, verhielt sich so, dass (Fig. 1), nachdem unendlich viele in einem gemeinsamen Gesetz enthaltene Linien AY, ay vorgelegt worden sind, andere durch jene normal hindurchlaufende Linien BYy gesucht werden, zu dessen Lösung die folgenden grundlegenden Dinge betrachtet werden müssen.

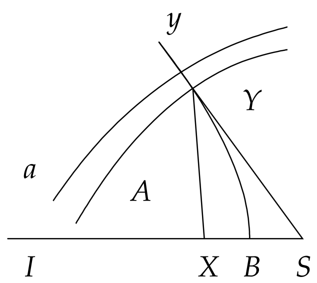

Fig. 1

1°. Weil die zu schneidenden Linien in einer bestimmten Gleichung enthalten sind, wird diese Gleichung außer den zwei Koordinaten $IX = x$ und

*Originaltitel: "Considerationes de traiectoriis orthogonalibus", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 14 1770, pp. 46-71", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 28, pp. 99 - 119 ", Eneström-Nummer E390, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$XY = y$ den Parameter p involvieren, welcher für dieselbe Kurve AY denselben Wert beibehalte, aber nach Ändern des Wertes die übrigen Kurven darbiete.

2°. Daher wird diese Gleichung differenziert, indem der Parameter p auch als Variable angenommen wird, eine Form dieser Art annehmen

$$Ldy = Mdx + Ndp;$$

daher wird für dieselbe Kurve AY, wegen $dp = 0$, gelten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{L};$$

und daher wird, nachdem zu ihr die normale Gerade YS gezogen worden ist, auch gelten

$$\text{Subnormale } XS = \frac{My}{L}.$$

3°. Aber diese selbe Subnormale XS muss für die schneidende Kurve BY die Subtangente sein, woher es unter Beibehalt derselben Koordinaten $IX = x$ und $XY = y$ für diese Kurve notwendig ist, dass ihre Subtangente diese ist

$$\text{Subtangente } \frac{ydx}{dy} = -\frac{My}{L}$$

und daher $Ldx + Mdy = 0$ ist.

4°. Für die zu schneidenden Kurven wird man nach Vorlegen einer Gleichung zwischen den Koordinaten x, y und dem variablen Parameter p, welche differenziert $Ldy = Mdx + Ndp$ liefere, für die zu schneidenden Kurven diese Differentialgleichung haben

$$Ldx + Mdy = 0.$$

§2 Die ganze Aufgabe ist also darauf zurückgeführt worden, dass, nachdem eine Differentialgleichung dieser Art $Ldy = Mdx + Ndp$ gegeben worden ist, eine Methode gefunden wird, diese Gleichung $Ldx + Mdy = 0$ zu integrieren, worin freilich freilich keine Schwierigkeit läge, wenn die Größen L und M allein die zwei Variablen x und y und nicht den Parameter p verwickelten, weil dann in ihr nur die zwei Variablen x und y auftauchen werden, und die Integration von Gleichungen dieser Art hier mit Recht als bereits erledigt angesehen wird. Aber wenn die Größen L und M darüber hinaus den Parameter p involvieren, so dass die Gleichung $Ldx + Mdy = 0$ die drei variablen Größen x, y und p enthält, ist es nicht einmal möglich, ihre Integration in Angriff zu nehmen, wenn sie nicht zugleich mit der anderen gegebenen Gleichung $Ldy = Mdx + Ndp$ verbunden wird, und daher eine der drei Variablen vollkommen eliminiert wird, dass eine Differentialgleichung zwischen nur zwei Variablen erhalten wird. Wenn es nicht möglich gewesen ist dies zu bewirken, wird kaum etwas über die Natur der orthogonalen Trajektorien bestimmt werden können, weshalb, sooft diese Schwierigkeit auftritt, das Problem mit Recht zu den schwersten gerechnet wird; es fehlt noch so viel, dass dieses Problem, auch wenn es einst mit allem Eifer behandelt worden ist, für vollständig gelöst zu halten ist, dass es eher immer noch zu beurteilen ist, der größten Aufmerksamkeit würdig zu sein.

§3 Weil also die ganze Aufgabe darauf zurückgeht, dass für die Trajektorien eine Differentialgleichung solcher Art gefunden wird, welche nur zwei Variablen enthält, wollen wir die grundlegenden Fälle durchgehen, in welchen sich dieses Ziel erreichen lässt.

1°. Und zuerst, wenn die Gleichung für die zu schneidenden Kurven so dargeboten werden kann, dass der Parameter p uneingeschränkt durch die Koordinaten x und y bestimmt wird oder einer gewissen Funktion von x und y gleich wird, wird diese Gleichung differenziert freilich eine Form dieser Art geben

$$dp = Pdx + Qdy,$$

in welcher P und Q Funktion nur von x und y sind, die mit der Form

$$Ldy = Mdx + Ndp$$

verglichen $L = Q$, $M = -P$ und $N = 1$ liefert. Daher wird man für die Trajektorien diese Gleichung haben:

$$Qdx - Pdy = 0,$$

die nur zwei Variablen x und y involviert, deren Integration daher für durchführbar gehalten werden kann.

2°. Wenn die Gleichung für die zu schneidenden Kurven so dargeboten werden kann, dass die Ordinate y einer gewissen Funktion von x und p gleich wird und aus ihrer Differentiation $dy = Pdx + Rdp$ hervorgeht, so dass P und R Funktionen nur von x und p sind, dann wird man wegen $L = 1$, $M = P$ und $N = R$ für die Trajektorien diese Gleichung $dx + Pdy = 0$ haben, die wegen $dy = Pdx + Rdp$ in diese Form übergeht:

$$(1 + PP)dx + PRdp = 0,$$

welche nur die Variablen p und x verwickelt.

3°. Wenn die Gleichung für die zu schneidenden Kurven so dargestellt wird, dass die Abszisse x einer gewissen Funktion von y und p gleich wird, aus deren Differentiation hervorgehe

$$dx = Qdy + Rdp,$$

wo P und R Funktionen nur von y und p sind, dann wird wegen $L = Q$, $M = 1$ und $N = -R$ die Natur der Trajektorien mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$Qdx + dy = 0,$$

welche wegen $dx = Qdy + Rdp$ in diese transformiert wird

$$(1 + QQ)dy + QRdp = 0,$$

also eine nur zwischen y und p.

§4 Sooft also entweder der Parameter p durch die beiden Koordinaten x und y oder die eine der Koordinaten durch die andere und den Parameter bestimmt wird, wird das Finden der Trajektorien auf eine Differentialgleichung solcher Art zurückgeführt, in welcher nur zwei variable Größen enthalten sind, deren Auflösung deshalb als dürchführbar angesehen werden können wird, auch wenn unter Umständen immer noch kein Weg offensteht, die Aufgabe zu erledigen. Dies ist aber zu verstehen, wenn jene Ausdrücke explizit waren, ob sie algebraisch oder transzendent sind, wenn sie aber nur durch Integralformeln gegeben sind, in welchen die eine der Variablen für konstant gehalten wird, dann werden die gefundenen Gleichungen keinen Nutzen haben, wenn sie nicht zufällig mit einem eigenen Kunstgriff von der Integralformel befreit werden können. Wie wenn man für die zu schneidenden Kurven eine Gleichung von dieser Art hat

$$y = \int V dx,$$

wo V eine Funktion nur von x und p sei, in dieser Integration der Parameter p aber wie eine Konstante angesehen wird: Dann hat man nämlich für den Wert von $dy = Pdx + Rdp$ zwar $P = V$, aber die neue Größe R wird in eine Integralform verwickelt, während gilt

$$R = \int dx \left(\frac{dV}{dp}\right),$$

in welcher Integration wiederum allein x als variabel angenommen wird. Daher, weil die Gleichung für die Trajektorien diese sein wird

$$(1+VV)dx + Vdp \int dx \left(\frac{dV}{dp}\right) = 0,$$

ist es wegen dieser Integralformel keineswegs klar, auf welche Weise ihre Auflösung durchgeführt werden muss.

§5 Damit diese Schwierigkeit klarer wird, möchte ich einen einzigartigen Fall entwickeln, in welchem es möglich ist, die Gleichung für die Trajektorien darzubieten und der schon einst mit einer mehr als genialen Methode gefunden worden ist. Es ist natürlich gefragt, eine Funktion von welcher Art von x und p die Größe V sein muss, dass, weil für die zu schneidenden Kurven $y = \int V dx$ ist, die Gleichung für die Trajektorien

$$(1+VV)dx + Vdp \int dx \left(\frac{dV}{dx}\right) = 0$$

mit einer gewissen Größe multipliziert integrierbar wird. Dieser Multiplikator sei $\frac{\Pi}{V}$, während Π eine Funktion von p ist, dass man hat

$$\frac{\Pi dx(1+VV)}{V} + dp \int \Pi dx \left(\frac{dV}{dx}\right) = 0;$$

weil nämlich Π die Größe x nicht involviert, wird natürlich sein

$$\Pi dp \int dx \left(\frac{dV}{dx}\right) = dp \int \Pi dx \left(\frac{dV}{dx}\right).$$

Nun werde das Integral dieser Form wie folgt festgelegt

$$= \int \frac{\Pi dx(1+VV)}{V},$$

dass man für die Trajektorien diese Gleichung hat

$$\int \frac{\Pi dx(1+VV)}{V} = C,$$

und weil sein Differential, das aus der Veränderlichkeit jeder der beiden x und p entsteht, wird:

$$\frac{\Pi dx(1+VV)}{V} + dp \int dx \left(\frac{1}{dp} d \frac{\Pi(1+VV)}{V} \right) = 0$$

muss daher festgelegt werden:

$$\int \Pi dx \left(\frac{dV}{dp} \right) = \int dx \left(\frac{1}{dp} d \frac{\Pi(1+VV)}{V} \right)$$

oder

$$\Pi \left(\frac{dV}{dp} \right) = \left(\frac{1}{dp} d \frac{\Pi(1+VV)}{V} \right).$$

Weil nun in diesen Differentialen allein p wie eine Variable, x hingegen wie eine Konstante angesehen wird, geht nach der Entwicklung hervor:

$$\Pi dV = \frac{\Pi dV(VV-1)}{VV} + \frac{d\Pi(1+VV)}{V}$$

oder

$$\frac{\Pi dV}{VV} = \frac{d\Pi(1+VV)}{V},$$

und daher

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{dV}{V(1+VV)} = \frac{dV}{V} - \frac{VdV}{1+VV},$$

woher durch Integrieren $\Pi = \frac{VX}{\sqrt{1+VV}}$ gefunden wird, nachdem anstelle der Konstante eine Funktion X nur von x eingeführt worden ist. Daher wird also

$$V = \frac{\Pi}{\sqrt{XX - \Pi\Pi}}.$$

§6 Betrachte und bestaune also diesen ziemlichen eleganten und sich zugleich nicht unwesentlich weit erstreckenden Fall, in welchem es möglich ist, die orthogonalen Trajektorien darzubieten, auch wenn die Gleichung für die zu schneidenden Kurven diese ist

$$y = \int \frac{\Pi dx}{\sqrt{XX - \Pi\Pi}},$$

wo X irgendeine Funktion der Abszisse x und irgendeines Parameters p bezeichnet, so dass diese Integralformel unter Umständen auf keine Weise eine Integration zulässt. Denn für die Trajektorien wird man wegen

$$1 + VV = \frac{XX}{XX - \Pi\Pi}$$

diese Gleichung haben

$$\int \frac{XXdx}{\sqrt{XX - \Pi\Pi}} = C,$$

welche für die verschiedenen Werte der Konstante C unendlich viele Kurven liefert, die alle die gegebenen Kurven normal durchlaufen. Für diese würde freilich eine Gleichung zwischen den Koordinaten x und y gefunden werden, wenn mit Hilfe der Gleichung

$$y = \int \frac{\Pi dx}{\sqrt{XX - \Pi\Pi}}$$

der Parameter p und die Funktion Π desselben eliminiert werden könnte; aber für die Konstruktion ist die gefundene Gleichung schon besonders geeignet. Denn für jeden Parameter oder jeden Wert des Buchstaben Π werde über der Achse eine Kurve beschrieben, deren Ordinate diese ist

$$\frac{XX}{\sqrt{XX - \Pi\Pi}},$$

und in ihr werde eine der gegebenen Fläche gleiche Fläche abgetrennt, deren Abszisse $= x$ sei, die Ordinate der Trajektorie wird diese sein

$$y = \int \frac{\Pi dx}{\sqrt{XX - \Pi\Pi}},$$

oder es reicht aus, diese zwei Gleichungen gekannt zu haben:

$$y = \int \frac{\Pi dx}{\sqrt{XX - \Pi\Pi}} \quad \text{und} \quad C = \int \frac{XXdx}{\sqrt{XX - \Pi\Pi}},$$

wo es angemerkt sei, dass C den Parameter der Trajektorien bezeichent.

§7 Aber ich glaube, dass sich mit diesen Dingen, die schon einst sehr umfassend behandelt worden sind, hier nicht länger aufzuhalten ist, sondern ich möchte eher andere Betrachtungen, zu welchen mich diese Frage geführt hat, in den Mittelpunkt stellen. Und zuerst bemerke ich freilich, was per se klar ist, dass die zu schneidenden Linien und Trajektorien einander reziprok sind und die Frage um zwei Systeme von Linien solcher Art kreist, die sich auf dieselbe Achse bezogen gegenseitig in rechten Winkeln schneiden. Aber die Natur jedes der beiden Systeme wird mit einer Gleichung zwischen den zwei Koordinaten x und y und einem Parameter ausgedrückt, dessen Veränderlichkeit unendlich viele gekrümmte Linien an die Hand gibt. Für das eine System sei dieser Parameter $= p$, für das andere hingegen $= q$; daher müssen zwei Gleichungen aufgefasst werden, die eine zwischen x, y und p, die andere hingegen zwischen x, y und q; welche Relation also zwischen diesen bestehen muss, dass der vorgelegten Bedingung Genüge geleistet wird, werde ich hier genauer untersuchen. Oben haben wir aber gesehen, wenn man für das andere System eine Differentialgleichung dieser Art hat

$$Ldp + Mdx + Ndy = 0,$$

dass die Natur des anderen dann mit dieser Gleichung

$$Ndx - Mdy = 0$$

ausgedrückt wird und hier sein Parameter q wie eine Konstante angesehen wird.

§8 Weil nun die Gleichung $Ndx - Mdy = 0$ eingesehen wird, nur die zwei Variablen x und y zu enthalten und der Parameter q dieses Systems erst in der durch die Integration hinzukommenden Konstanten involviert wird, wird die Differentialgleichung für das andere System, indem auch der Parameter q für eine Variable gehalten wird, so beschaffen sein:

$$Kdq + Ndx - Mdy = 0.$$

Und daher wissen wir, dass die Differentialgleichung für jedes der beiden Liniensysteme so miteinander verbunden sind, dass sie sind:

$$Ldp + Mdx + Ndy = 0 \quad \text{und} \quad Kdq + Ndx - Mdy = 0.$$

Wenn in jener p, in dieser hingegen q durch x und y gegeben ist und jede der beiden Gleichungen integrierbar gemacht wird, werden Formen von dieser Art hervorgehen:

$$dp = M(Pdx + Qdy) \quad \text{und} \quad dq = N(Qdx - Pdy),$$

wo P und Q irgendwelche Funktionen von x und y, M und N hingegen Multiplikatoren von solcher Art bezeichnen, welche jene Differentialformeln

$$Pdx + Qdy \quad \text{und} \quad Qdx - Pdy$$

integrierbar machen. Weil dies immer geschehen kann, können daher leicht unendlich viele Paare von Systemen dieser Art dargeboten werden: Wie wenn beispielsweise $P = X$, einer Funktion von x, und $Q = Y$, einer Funktion y gleich ist, werden sich unsere Gleichungen integriert so verhalten:

$$p = \int Xdx + \int Ydy \quad \text{und} \quad q = \int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}.$$

§9 Wir wollen auch die beiden Koordinaten durch die Parameter p und q definieren, und unsere Gleichungen werden so beschaffen sein

$$dx + \frac{LMdp + KNdq}{MM + NN} = 0 \quad \text{und} \quad dy + \frac{LNdp - KMdq}{MM + NN} = 0,$$

welche auf diese gefälligeren Formen zurückgeführt werden:

$$dx = PRdp + QSdq \quad \text{und} \quad dy = PSdp - QRdq,$$

und hier bezeichnen nun P, Q, R und S Funktionen von p und q solcher Art, dass die beiden Formeln integrierbar werden. Weil also x und y Funktionen von p und q sind, wird sein

$$PR = \left(\frac{dx}{dp}\right), \quad QS = \left(\frac{dx}{dq}\right), \quad PS = \left(\frac{dy}{dp}\right), \quad QR = -\left(\frac{dy}{dq}\right),$$

daher wird diese vorzügliche Eigenschaft erschlossen, dass gilt

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right)+\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)=0,$$

und daher ergibt sich weiter diese Frage von höchster Bedeutung, auf welche Weise, wenn für die eine der Koordinaten x und y eine selbiger gleiche Funktion von p und q gegeben ist, daher eine der anderen gleiche Funktion von p und q gefunden werden muss: Diese Frage zu ist einem Teil des Integralkalküls zu rechnen, welcher erst entwickelt werden muss.

§10 Weil die Lösung dieser Gleichung sehr schwer zu sein scheint, wird es der Mühe wert sein, die gerade gefundenen Gleichungen

$$dx = PRdp + QSdq \quad \text{und} \quad dy = PSdp - QRdq$$

mit einer anderen Methode aufzulösen. Natürlich die imaginären Größen nicht schreckend, erschließen wir daher:

$$dx + dy\sqrt{-1} = (R + S\sqrt{-1})(Pdp - Qdq\sqrt{-1}),$$

auf die gleiche Weise ist aber notwendigerweise:

$$dx - dy\sqrt{-1} = (R - S\sqrt{-1})(Pdp + Qdq\sqrt{-1}).$$

Nun, was für Funktionen von p und q auch immer P und Q waren, wird immer ein Multiplikator gefunden werden können, der diese zweideutige Form

$$Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}$$

integrierbar macht: Es sei also M dieser Multiplikator und es werde Folgendes festgelegt

$$\int M(Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}) = T \pm V\sqrt{-1};$$

und für $R \pm S\sqrt{-1}$ muss irgendeine Funktion von $T \pm V\sqrt{-1}$, die mit M multipliziert worden ist, angenommen werden, woher nach durchgeführter Integration hervorgehen wird

$$x + y\sqrt{-1} = \text{Funkt.}(T + V\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad x - y\sqrt{-1} = \text{Funkt.}(T - V\sqrt{-1})$$

und daher erschließen wir diese Integralformen:

$$
\begin{aligned}
x = {} & \frac{1}{2}\Gamma : (T + V\sqrt{-1}) \quad + \quad \frac{1}{2}\Gamma : (T - V\sqrt{-1}) \quad + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta : (T + V\sqrt{-1}) \\
& - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta : (T + V\sqrt{-1}) \\
y = {} & \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (T + V\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (T - V\sqrt{-1}) - \frac{1}{2}\Delta : (T + V\sqrt{-1}) \\
& - \frac{1}{2}\Delta : (T - V\sqrt{-1}),
\end{aligned}
$$

welche immer reell werden, welche Funktionen auch immer mit diesen Zeichen Γ und Δ bezeichnet werden.

§11 Hier bezeichnen die Buchstaben T und V Funktionen der zwei Parameter p und q, aber keineswegs beliebige, denn sie werden aus der Differentialformel $Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}$ bestimmt, wo P und Q notwendigerweise reelle Größen sind. Aber dennoch kann die Gestalt jener Größen T und V ohne diese Bedingung gefunden werden, indem bedacht wird, dass gelten muss

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0.$$

Weil wir nämlich gefunden haben:

$$x + y\sqrt{-1} = \Sigma : (T + V\sqrt{-1}) \qquad x - y\sqrt{-1} = \Theta : (T - V\sqrt{-1}),$$

wird durch Differenzieren sein:

$$
\begin{aligned}
&\text{I.} && \left(\frac{dx}{dp}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1} = \left(\left(\frac{dT}{dp}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right)\Sigma' : (T + V\sqrt{-1}), \\
&\text{II.} && \left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dq}\right)\sqrt{-1} = \left(\left(\frac{dT}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dq}\right)\sqrt{-1}\right)\Sigma' : (T + V\sqrt{-1}), \\
&\text{III.} && \left(\frac{dx}{dp}\right) - \left(\frac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1} = \left(\left(\frac{dT}{dp}\right) - \left(\frac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right)\Theta' : (T - V\sqrt{-1}), \\
&\text{IV.} && \left(\frac{dx}{dq}\right) - \left(\frac{dy}{dq}\right)\sqrt{-1} = \left(\left(\frac{dT}{dq}\right) - \left(\frac{dV}{dq}\right)\sqrt{-1}\right)\Theta' : (T - V\sqrt{-1});
\end{aligned}
$$

daher werden die Produkte I $\times$ IV und III $\times$ II zu einer Summe gesammelt und es wird aufgefunden werden:

$$2\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right)+2\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)$$
$$=2\left(\left(\frac{dT}{dp}\right)\left(\frac{dT}{dq}\right)+\left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{dV}{dq}\right)\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1})\Theta'(T-V\sqrt{-1})$$

und daher sind die Funktionen T und V so beschaffen, dass gilt

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)\left(\frac{dT}{dq}\right)+\left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{dV}{dq}\right)=0.$$

§12 Daher sehen wir also ein, dass für T und V Funktionen von p und q solcher Art genommen werden müssen, welche schon selbst geeignete Werte für die Koordinaten x und y liefern. Deshalb, nachdem schon zwei Werte gefunden worden sind, die zwei Systeme von sich gegenseitig schneidenden Linien darbieten, $x=t$ und $y=u$, wobei t und u Funktionen solcher Art der zwei Parameter p und q sind, dass gilt

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right)+\left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right)=0,$$

werden daher sehr leicht unendlich viele andere Paare solcher Systeme deriviert, welche in den zwei folgenden Gleichungen enthalten sind

$$\begin{aligned}x=\frac{1}{2}\Gamma(t+u\sqrt{-1})+\frac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t+u\sqrt{-1})&\\+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t+u\sqrt{-1}),&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1})-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})+\frac{1}{2}\Delta:(t+u\sqrt{-1})&\\+\frac{1}{2}\Delta:(t-u\sqrt{-1}),&\end{aligned}$$

welche kompliziertere Form ich daher ausgewählt habe, dass sich die imaginären Größen beim Entwickeln von selbst aufheben.

§13 Diese Formen sind für die Praxis besser geeignet, weil mit derselben Operation unendlich viele Lösungen erhalten werden können. Es mögen nämlich, indem für Γ verschiedene bestimmte Funktionen genommen werden, aus der Form

$$\frac{1}{2}\Gamma : (t+u\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Gamma : (t-u\sqrt{-1})$$

diese Werte T, T', T'', T''' etc. aus dieser

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (t+u\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (t-u\sqrt{-1})$$

hingegen diese V, V', V'', V''' etc. hervorgehen, und die der Frage Genüge leistenden Werte werden die folgenden sein

$$\begin{aligned}
x &= \alpha T + \beta T' + \gamma T'' + \delta T''' + \text{etc.} - \varepsilon V - \zeta V' - \eta V'' - \vartheta V''' - \text{etc.},\\
y &= \alpha C + \beta V' + \gamma V'' + \delta V''' + \text{etc.} - \varepsilon T - \zeta T' - \eta T'' - \vartheta T''' - \text{etc.},
\end{aligned}$$

wo die Buchstaben α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ irgendwelche Koeffizienten bezeichnen. Es ist aber sittsam anzumerken, dass die homologen Werte T, V ebenso T', V' etc. aus denselben Funktionen Γ und zugleich alle aus denselben Buchstaben t und u zu bilden sind. Denn es lässt sich daher nicht im Allgemeinen schließen, wenn die Werte $x = T$, $y = V$, dann aber auch irgendwelche andere $x = R$, $y = S$ Genüge leisten, dass auch diese

$$x = \alpha T + \beta R \quad \text{und} \quad y = \alpha V + \beta S$$

genügen werden; dies gilt nämlich nur, wenn die Funktionen R und S aus denselben Buchstaben t und u wie die Funktionen T und V entstanden sind. Daher ist sorgfältig darauf zu achten, dass den oberen allgemeinen Formeln nicht mehr zugeschrieben wird als es rechtens ist.

§14 Die aus den schon gefundenen geeigneten Größen t und u zu bildenden einfacheren Werte der Buchstaben T und V entsprießen aus den anstelle der Funktion Γ eingesetzten Potenzen und werden sich so verhalten:

$$\begin{array}{lllll}
T = t & T = tt - uu & T = t^3 - 3tuu & T = t^4 - 6ttuu + u^4 & \text{etc.}\\
V = u & V = 2tu & V = 3ttu - u^3 & V = 4t^3u - 4tu^3 & \text{etc.}
\end{array}$$

aus den negativen Potenzen entspringen hingegen diese:

$$T = \frac{t}{tt+uu} \qquad T = \frac{tt-uu}{(tt+uu)^2} \qquad T = \frac{t^3-3tuu}{(tt+uu)^3} \qquad T = \frac{t^4-6ttuu+u^4}{(tt+uu)^4} \quad \text{etc.},$$

$$V = \frac{u}{tt+uu} \qquad V = \frac{2tu}{(tt+uu)^2} \qquad T = \frac{3ttu-u^3}{(tt+uu)^3} \qquad V = \frac{4t^3u-4tu^3}{(tt+uu)^4} \qquad \text{etc.},$$

wo sich beobachten lässt, wenn festgelegt wird

$$t = v\cos\varphi \quad \text{und} \quad u = v\sin\varphi,$$

dass all diese Werte dann in diesen einfachen Formeln enthalten sind

$$T = v^n \cos n\varphi \quad \text{und} \quad V = v^n \sin n\varphi.$$

Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass für t und u geeignete Funktionen von p und q solcher Art erhalten werden, dass wird

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dp}\right) = 0.$$

§15 Oder, was auf dasselbe zurückgeht, es werde, nachdem für P und Q irgendwelche Funktionen von p und q genommen worden sind, diese Differentialformel betrachtet

$$Pdp + Qdq\sqrt{-1}$$

und es werde ein Multiplikator gesucht, der sie integrierbar macht, dann werde das aus dem Real- und Imaginärteil bestehende Integral mit der Formel $t+u\sqrt{-1}$ verglichen und daher wird dann ein geeigneter Wert für jeden der beiden Buchstaben t und u gefunden werden. Daher bemerke ich zuerst, wenn P eine Funktion allein von p und Q eine allein von q ist, dass dann hervorgeht

$$t = \int Pdp \quad \text{und} \quad u = \int Qdq.$$

Weil diese Formen $\int Pdp$ und $\int Qdq$ ja gleichermaßen für die Parameter der beiden Liniensysteme gehalten werden können wie die Größen p und q selbst, ist es dasselbe als wenn wir daher $t = p$ und $u = q$ setzen, und daher ist auch diese nachstehende Festlegung nicht anzusehen sich weiter zu erstrecken

$$t = \alpha p + \beta \quad \text{und} \quad u = \gamma q + \delta.$$

Dennoch gibt indes, wenn wir $P = 1$ und $Q = 1$ nehmen, die Formel

$$dp + dq\sqrt{-1}$$

nicht nur $t = p$ und $u = q$, sondern, weil jene Formel mit $m + n\sqrt{-1}$ multipliziert integrierbar bleibt und das Integral dieses ist

$$t = mp - nq \quad \text{und} u = np + mq,$$

werden daher diese Werte erhalten:

$$t = mp - nq \quad \text{und} \quad u = np + mq,$$

welche sich natürlich weiter zu erstrecken scheinen, aber dennoch, weil dich die daher entstehenden Werte T, T', T'' und V, V', V'' etc. kombinieren lassen, entsprießen daher keine anderen Linien als aus den einfachen Werten $t = p$ und $u = q$.

§16 Wir wollen also $t = p$ und $u = q$ setzen und wollen einfachere Systeme von Linien durchgehen, die sich gegenseitig in rechten Winkeln schneiden; und zuerst tauchen freilich diese Formen auf:

$$x = \alpha p - \varepsilon q \quad \text{und} \quad y = \alpha q + \varepsilon p,$$

woher, indem zuerst q dann aber p eliminiert wird, die beiden Liniensysteme in diesen Gleichungen enthalten sein werden:

$$\alpha x + \varepsilon y = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)p \quad \text{und} \quad \alpha y - \varepsilon x = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)q$$

wobei jedes der beiden unendlich viele einander parallele gerade Linien enthält, von denen jede beliebige die Geraden des anderen Systems normal schneidet, welches ohne Zweifel der einfachste Fall ist.

§17 Es werde also als zweites $T = tt - uu$ und $V = 2tu$ genommen, und weil durch Verbinden dieser zwei Terme die Linien nur auf eine andere Achse übertragen werden, wollen wir einfach $x = pp - qq$ und $y = 2pq$ setzen; daher, weil gilt

$$\sqrt{xx+yy} = pp + qq,$$

erlangen wir, indem wir abwechselnd p und q eliminieren, für die zwei Liniensysteme diese Gleichungen

$$\sqrt{xx+yy} + x = 2pp \quad \text{und} \quad \sqrt{xx+y} - x = 2qq.$$

Daher, wenn wir anstelle von $2pp$ und $2qq$ einfach p und q schreiben, werden sich diese Gleichungen so verhalten:

$$yy = pp - 2px \quad \text{und} \quad yy = qq + 2qx.$$

Jede der beiden Gleichungen enthält unendlich viele über einer gemeinsamen Achse aus demselben Brennpunkt beschriebene Parabeln, während die Parabeln des einen Systems nach rechts, die des anderen hingegen nach links auslaufen; dies ist die wunderschöne Eigenschaft der Parabeln, die ohne Zweifel schon vor langer Zeit beobachtet worden ist. Zusätzlich bemerke ich, auch wenn die vorhergehenden Werte $T = p$ und $V = q$ mit diesen verbunden werden, dass dennoch dieselben Parabeln hervorgehen werden.

§18 Wir wollen nun festlegen

$$T = t^3 - 3tuu \quad \text{und} \quad V = 3ttu - u^3$$

und wollen diese Gleichungen bilden:

$$x = p^3 - 3pqq \quad \text{und} \quad y = 3ppq - q^3$$

von welchen diese gibt

$$p = \sqrt{\frac{y+q^3}{3q}},$$

welcher Wert in der ersten eingesetzt liefert:

$$x = \frac{y - 8q^3}{3q}\sqrt{\frac{y+q^3}{3q}},$$

und nach Nehmen von Quadraten:

$$27q^3xx = y^3 - 15q^3yy + 48q^6y + 64q^9;$$

wir wollen q und p anstelle von q^3 und p^3 schreiben, und die Gleichungen für die beiden Liniensysteme werden diese sein:

$$\begin{aligned}27qxx &= \quad y^3 - 15qyy + 48qqy + 64q^3 \\ 27pyy &= -x^3 - 15pxx - 38ppx + 64p^3,\end{aligned}$$

welche aber, um die Eigenschaften zu erkennen, besser so dargestellt werden:

$$x = \frac{y-8q}{3}\sqrt{\frac{y+q}{3q}} \quad \text{und} \quad y = \frac{x+8p}{3}\sqrt{\frac{p-x}{3p}},$$

welche Gleichungen Linien dritter Ordnung geben, welche für jedes der beiden Systeme von derselben Natur sind, während nur die Koordinaten vertauscht werden.

§19 Wir wollen auch aus den negativen Potenzen entstehende Funktionen betrachten und es sei

$$T = \frac{t}{tt+uu} \quad \text{und} \quad V = \frac{u}{tt+uu},$$

und wegen $t = p$ und $u = q$ werden wir haben:

$$x = \frac{p}{pp+qq} \quad \text{und} \quad y = \frac{q}{pp+qq}.$$

Daher wird

$$xx + yy = \frac{1}{pp+qq},$$

und daher werden wir für die beiden Liniensysteme diese Gleichungen haben:

$$x = p(xx+yy) \quad \text{und} \quad y = q(xx+yy).$$

Wir wollen die Form jedes der beiden Parameter so verändern, dass wir festlegen

$$p = \frac{1}{2p} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{2q},$$

und die beiden Liniensysteme werden mit diesen Gleichungen ausgedrückt werden:

$$xx + yy = 2px \quad \text{und} \quad xx + yy = 2qy,$$

welche zwei Kreissysteme liefern.

§20 Wir wollen aus demselben Geschlecht auch die folgenden Formeln entwickeln und es sei

$$x = \frac{pp - qq}{(pp + qq)^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{2pq}{(pp + qq)^2}.$$

Daher finden wir zuerst:

$$xx + yy = \frac{1}{(pp + qq)^2},$$

so dass gilt

$$\frac{x}{xx + yy} = pp - qq \quad \text{und} \quad \frac{y}{xx + yy} = 2pq.$$

Des Weiteren, weil gilt

$$pp + qq = \frac{1}{\sqrt{xx + yy}},$$

finden wir auf

$$2pp = \frac{x + \sqrt{xx + yy}}{xx + yy} \quad \text{und} \quad 2qq = \frac{\sqrt{xx + yy} - x}{xx + yy};$$

wir wollen nun $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ anstelle von $2pp$ und $2qq$ schreiben, und die zwei Liniensysteme werden mit diesen Gleichungen ausgedrückt

$$xx + yy = px + p\sqrt{xx + yy} \quad \text{und} \quad xx + yy = q\sqrt{xx + yy} - qx,$$

welche auf diese zurückgeführt werden

$$(xx + yy)^2 - 2px(xx + yy) = ppyy \quad \text{oder} \quad yy = \frac{1}{2}pp + px - xx + p\sqrt{\frac{1}{4}pp + px}$$

$$(xx + yy)^2 + 2qx(xx + yy) = qqyy \quad \text{oder} \quad yy = \frac{1}{2}qq - qx - xx - q\sqrt{\frac{1}{4}qq + qx}.$$

Diese zwei Liniensysteme sind also in derselben gemeinsamen Gleichung vierter Ordnung enthalten, während in der einen der Parameter nur negativ angenommen wird.

§21 Diese Lösung scheint der ganzen Aufmerksamkeit würdig, weil sie im Allgemeinen durch Integration gefunden worden ist und daher für die Lösung dieses Problems überaus geeignet ist:

Die Systeme von Linien zu finden, deren Trajektorien ebenso algebraische Linien sind.

Solange nämlich eine Gleichung für jene Linien zwischen den Koordinaten x und y betrachtet wird, wird die Klärung dieser Frage vergeblich in Angriff genommen und der ganze zu diesem Ziel führende Kunstgriff ist darin gelegen, dass wir jede der beiden Koordinaten auf die zwei variablen Parameter jedes der beiden Systeme reduzieren. Die Lösung dieses Problems verhält sich also so, dass aus jeglichem gefundenen Fall sehr leicht unendlich viele andere Fälle angegeben werden können. Es seien nämlich t und u Funktionen der Parameter p und q solcher Art, die nun die Koordinaten der beiden Systeme darstellen, so dass gilt:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right)+\left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right)=0.$$

Dann werden wie viele andere Koordinaten x und y auch immer erhalten werden, indem Nachstehendes angenommen wird

$$x+y\sqrt{-1}=f:(t+u\sqrt{-1}),$$

woher, wenn t und u schon algebraische Funktionen sind, alle algebraischen Funktionen der Formel $t+u\sqrt{-1}$ gleichermaßen algebraische Funktionen für x und y liefern werden.

§22 Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass zuerst einfachere Fälle für t und u bekannt werden; und die einfachsten sich von selbst darbietenden sind freilich $t=p$ und $u=q$, oder auch

$$t=\alpha p+\beta q \quad \text{und} \quad u=\gamma p+\delta q,$$

welche eine überreiche Menge an je zwei algebraischen Systemen schenken.

Dann verdient aber dieser einzigartige Fall angemerkt zu werden

$$t = \sqrt{p(a+q)} \quad \text{und} \quad u = \sqrt{q(b-p)};$$

wie welcher genügt, wird durch Nehmen der Differentiale eingesehen:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{\sqrt{a+q}}{2\sqrt{p}}, \quad \left(\frac{dt}{dq}\right) = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{a+q}}, \quad \text{daher} \left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) = \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{du}{dp}\right) = -\frac{\sqrt{q}}{2\sqrt{b-p}}, \quad \left(\frac{du}{dq}\right) = \frac{\sqrt{b-p}}{2\sqrt{q}}, \quad \text{daher} \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = -\frac{1}{4},$$

woher sich deshalb auch unendlich viele andere Lösungen derivieren lassen. Dieser Fall selbst gibt aber zwei wunderschöne Liniensysteme zweiter Ordnung an die Hand: Denn nach Setzen von:

$$xx = ap + pq \quad \text{und} \quad yy = bq - pq$$

gehen wegen $xx + yy = ap + bq$ für jedes der beiden Systeme diese Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad & p(xx+yy) - bxx + ap(b-p) = 0, \\ 2^\circ. \quad & q(xx+yy) - ayy + bq(a+q) = 0, \end{aligned}$$

von welchen diese eine für unendlich viele Ellipsen, jene wegen $b > p$ hingegen für unendlich viele über einer gemeinsamen Achse aus demselben Zentrum heraus beschriebene Hyperbeln ist.

§23 Oben habe ich schon gezeigt (§ 14), auf welche Weise sich aus den geeigneten bekannten Werten für t und u dieser Art unendlich viele Werte T, V, T', V', V'', V'' etc. finden lassen, aus welchen darauf folgend weiter unendlich viele andere Paare von Systemen gebildet werden können, indem Nachstehendes angenommen wird

$$\begin{aligned} x &= \alpha T - \varepsilon V + \beta T' - \zeta V' + \gamma T'' - \eta V'' + \text{etc.}, \\ y &= \alpha V + \varepsilon T + \beta V' + \zeta T' + \gamma V'' + \eta T'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Diese Werte T und V habe ich freilich dort allein aus den Potenzen der Formel $t + u\sqrt{-1}$ gefunden, indem ich festgelegt habe

$$T + V\sqrt{-1} = (t + u\sqrt{-1})^n,$$

mit demselben Recht lassen sich irgendwelche anderen Funktionen gebrauchen. Wie wenn wir beispielsweise festlegen

$$T + V\sqrt{-1} = \frac{f + g(t + u\sqrt{-1})}{h + k(t + u\sqrt{-1})} = \frac{f + gt + gu\sqrt{-1}}{h + kt + ku\sqrt{-1}},$$

wollen wir zuerst den Nenner reell machen, dann werden wir aber erlangen:

$$T = \frac{(f + gt)(h + kt) + gkuu}{(h + kt)^2 + kkuu} \quad \text{und} \quad V = \frac{(gh - fk)u}{(h + kt)^2 + kkuu},$$

wo es förderlich wird angemerkt zu haben, weil gilt

$$T - V\sqrt{-1} = \frac{f + gt - gu\sqrt{-1}}{h + kz - ku\sqrt{-1}},$$

dass auch gelten wird

$$TT + VV = \frac{(f + gt)^2 + gguu}{(h + kt)^2 + kkuu},$$

daher wird nämlich erschlossen:

$$TT + VV = \frac{(fk + gh + 2gkt)T - g(f + gt)}{k(h + kt)},$$

und

$$TT + VV = \frac{(gh - fk)V + 2gkuT - ggu}{kku},$$

ebenso

$$kT + \frac{(h + kt)V}{u} - g = 0.$$

§24 Wir wollen diese Entwicklung auf einfachere Fälle anwenden und wollen zuerst $t = p$ und $u = q$ setzen und, indem für T und V die Koordinaten x und y selbst genommen werden, liefern die zwei letzten Gleichungen

$$xx + yy = \frac{(fk + gh + 2gkp)x - g(f + gp)}{k(h + kp)} = \frac{(f + gp)x + gqy}{h + hp},$$

von welchen die erste allein den Parameter p enthaltend schon das eine der Liniensysteme darbietet, welche Linien freilich alle Kreise sein werden. Dann wird aber wegen

$$p = \frac{f - hx + kqy}{kx - g}$$

für das andere System nach der Reduktion diese Gleichung entspringen

$$xx + yy = \frac{(gh - fk)y + 2gkqx - ggq}{kkq},$$

welche auch unendliche viele Kreise in sich umfasst.

Für den anderen Fall wollen wir $a = 0$, $b = cc$ nehmen und pp und qq anstelle von p und q schreiben, dass wir haben

$$t = pq \quad \text{und} \quad u = q\sqrt{cc - pp};$$

daher wird also werden

$$xx + yy = \frac{(fk + gh + 2gkpq)x - g(f + gpq)}{k(h + kpq)},$$

$$(h + kpq)x - kqy\sqrt{cc - pp} = f + gpq,$$

dann aber auch:

$$xx + yy = \frac{(gh - fk) + 2gkqx\sqrt{cc - pp} - ggq\sqrt{cc - pp}}{kkq\sqrt{cc - pp}} \quad \text{und} \quad kx + \frac{(h + kpq)y}{q\sqrt{cc - pp}} - g = 0.$$

Daher, weil gilt

$$q = \frac{hy}{(g - kx)\sqrt{cc - pp} - kpy},$$

wird für das andere System diese Gleichung gefunden:

$$xx + yy = \frac{(gh + fk)x}{hk} - \frac{(gh - fk)py}{hk\sqrt{cc - pp}} - \frac{fg}{hk}.$$

Weil diese Form so dargestellt werden kann

$$xx + yy = py - aa \quad \text{für einen Kreis,}$$

wird die Gleichung des anderen System sein

$$xx + yy = qx + aa \quad \text{ebenso für einen Kreis.}$$

Mit solchen Kreisen pflegen in Weltkarten die Meridiane und Parallelen dargestellt zu werden.

§25 Damit diese Rechnung nicht dermaßen lästig wird, wollen wir, wenn wir im Allgemeinen setzen wollen

$$t = \sqrt{p(a + q)} \quad \text{und} \quad u = \sqrt{q(b - p)},$$

zuerst daher so p wie q durch t und u ausdrücken, woher die folgenden Gleichungen entsprießen werden

$$0 = btt - p(tt + uu) - ap(b - p) \quad \text{und} \quad 0 = auu + q(tt + uu) - bq(a + q).$$

Nun werden wir, indem wir anstelle von T und V die Koordinaten x und y selbst nehmen, aus den oberen Formeln erschließen:

$$t = \frac{(fk + gh)x - fg - hk(xx + yy)}{kk(xx + yy) - 2gkx + gg} = \frac{(kx - g)(f - hx) - hkyy}{(kx - g)^2 + kkyy},$$

$$u = \frac{(gh - fk)y}{(kx - g)^2 + kkyy}.$$

Wir wollen, um die Rechnung abzukürzen, festlegen

$$f - hx = hr \quad \text{und} \quad kx - g = ks,$$

dass ist

$$fk - gh = hk(r + s)$$

und

$$t = \frac{h}{k} \cdot \frac{rs - yy}{ss + yy}, \quad u = -\frac{h}{k} \cdot \frac{(r+s)y}{ss + yy}$$

und daher

$$tt + uu = \frac{hh}{kk} \cdot \frac{rrss + (rr + ss)yy + y^4}{(ss + yy)^2} = \frac{hh}{kk} \cdot \frac{rr + yy}{ss + yy}.$$

Nun, weil r und s die Abszisse x involvieren, werden die Gleichungen für die zwei Liniensysteme so beschaffen sein:

$$\text{I.} \quad 0 = b(rs - yy)^2 - p(rr + yy)(ss + yy) - \frac{akkp(b-p)}{hh}(ss + yy)^2,$$

$$\text{II.} \quad 0 = a(r+s)^2 yy + p(rr + yy)(ss + yy) - \frac{bkkq(a+q)}{hh}(ss + yy)^2,$$

welche beiden zu Linien vierter Ordnung gerechnet werden.

Nun gibt die zweite Gleichung im Fall $a = 0$, deren Entwicklung zuvor sehr schwer war, durch $ss + yy$ dividiert sofort

$$0 = rr + yy - \frac{bkk(a+q)}{hh}(ss + yy) \quad \text{oder} \quad hh(rr + yy) = bkkq(ss + yy),$$

welche wegen

$$r = \frac{f}{h} - x \quad \text{und} \quad s = x - \frac{g}{k}$$

offenbar für einen Kreis ist, die erste geht hingegen wegen

$$(rr + yy)(ss + yy) = (rs - yy)^2 + (r+s)^2 yy$$

in diese über

$$0 = (b - p)(rs - yy)^2 - p(r+s)^2 yy$$

oder in diese

$$rs - yy = (r+s)y\sqrt{\frac{p}{b-p}},$$

in gleicher Weise für einen Kreis.

§26 Aus der oben gegebenen allgemeinen Lösung werden wir aber auch die sehr schöne Frage aufklären können, welche sich mit einer anderen Methode kaum behandeln lässt.

Zwei Systeme von Linien, die sich gegenseitig normal schneiden, von solcher Art zu finden, welche beide in derselben Gleichung enthalten sind, so dass, je nachdem ob dem Parameter ein positiver oder negativer Wert zugeteilt wird, daher die beiden System entsprießen.

Den einfachsten dieser Bedingung Genüge leistenden Fall haben wir schon oben in Paragraph 17 erhalten, in welchem diese Gleichung $yy = pp - 2px$, je nachdem ob der Parameter p positiv oder negativ angenommen wird, zwei Reihen von Parabeln darbietet, die sich gegenseitig in rechten Winkeln scheiden.

§27 Eine sich weiter erstreckende Lösung werden wir aber auffinden, wenn wir festlegen

$$x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})^{2n} = (pp - qq + 2pq\sqrt{-1})^n,$$

welche Form durch Vertauschen der Parameter p und q übergeht in

$$(qq - pp + 2pq\sqrt{-1})^n = (-1)^n(pp - qq - 2pq\sqrt{-1})^n = (-1)^n(x - y\sqrt{-1})$$

und daher geht $x + y\sqrt{-1}$ dann entweder in $x - y\sqrt{-1}$ oder in $-x + y\sqrt{-1}$ über, je nachdem ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl war. In jenem Fall wird aber nur die Ordinate y, in diesem hingegen nur die Abszisse x negativ angenommen, und in jedem der beiden bleiben die Kurven in derselben Gleichung enthalten. Daher, wenn die Buchstaben α, β, γ etc. irgendwelche ungeraden Zahlen bezeichnen, erlangen wir daher diese zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad x + y\sqrt{-1} &= A(p + q\sqrt{-1})^{2\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{2\beta} \\
&\quad + C(p + q\sqrt{-1})^{2\gamma} + \text{etc.} \\
\text{II.}\quad x + y\sqrt{-1} &= A(p + q\sqrt{-1})^{4\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{24\beta} \\
&\quad + C(p + q\sqrt{-1})^{4\gamma} + \text{etc.;}
\end{aligned}$$

in der ersten sind natürlich alle Exponenten verdoppelte ungerade Zahlen, in der zweiten hingegen verdoppelte gerade Zahlen: Aber die Buchstaben α, β, γ können auch negative Zahlen und sogar gebrochene, solange die Zähler und die Nenner ungerade Zahlen sind, bezeichnen. Aber allgemeiner können diese zwei so dargeboten werden, dass nach Setzen von

$$pp - qq + 2pq\sqrt{-1} = R$$

die Formel $x + y\sqrt{-1}$ einer entweder ungeraden oder geraden Funktion von R gleich wird.

§28 Es lässt sich darüber hinaus dieses Problem hinzufügen:

Zu scheidende Kurven solcher Art zu finden, dass die zu schneidenden Kurven von jenen nur darin abweichen, dass die Koordinaten x und y miteinander vertauscht werden, oder dass dieselben Linien auf eine der ersten normalen Achse translatiert jene normal durchlaufen.

Dieses Problem wird mit Hilfe dieser Formel aufgelöst werden

$$x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{\beta} + C(p + q\sqrt{-1})^{\gamma} + \text{etc.},$$

wenn anstelle der Exponenten α, β, γ etc. ungerade Zahlen entweder der Form $4i + 1$ oder der Form $4i + 3$ genommen werden. Die ungeraden Zahlen dieser zwei Geschlechter dürfen aber in derselben Formel nicht miteinander vermischt werden. Daher muss $x + y\sqrt{-1}$ einer Funktion solcher Art von $p + q\sqrt{-1}$ gleich werden, in welcher nur Potenzen auftauchen, deren Exponenten entweder alle von der Form $4i + 1$ oder alle von der Form $4i + 3$ sind.